楕円曲線の
Hodge-Arakelov 理論 I

望月 新一
京都大学数理解析研究所
motizuki@kurims.kyoto-u.ac.jp

§**1.** 主結果
（比較同型と数論的
小平 —Spencer 射）

§**2.** 哲学：「絶対的な微分を求めて」

§1. 主結果

（A．） 比較同型の簡略版

K: 標数 0 の体

E: K 上の楕円曲線

$E^\dagger$: その <u>普遍拡大</u>

$$= \{\ (\mathcal{L}, \nabla_{\mathcal{L}})\ \text{のモジュライ :}\quad \text{ただし、}\ \deg(\mathcal{L}) = 0\}$$

$$\overset{\text{char } 0}{=} H^1_{\mathrm{DR}}(E, \mathcal{O}_E^\times)$$

$$\Longrightarrow \quad E^\dagger \longrightarrow E$$

$$\ldots\ldots \quad \omega_E \ (\overset{\text{def}}{=} \Omega_{E/K}|_{0_E})\text{-}\underline{\text{torsor}}$$

<u>$\mathbf{C}$ 上では</u>: $E^\dagger = H^1_{\mathrm{DR}}(E, \mathcal{O}_E)/\Lambda$

ただし、 $\Lambda = H^1_{\mathrm{sing}}(E, 2\pi i\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^2$

一般には:

$$E^\dagger \text{ の接空間 } = H^1_{\mathrm{DR}}(E, \mathcal{O}_E)$$

標数 0: ${}_dE^\dagger \cong {}_dE \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker[d] : E \to E$

$(d > 0\text{: 整数})$

（混標数では、分母が発生）

$\eta \in E(K)$: 位数 m の等分点、

s. t. d が m を割らない。

$\mathcal{L} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{O}_E(d \cdot [\eta])$

主定理: 制限射

$$\Gamma(E^\dagger, \mathcal{L})^{<d} \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathcal{L}|_{{}_dE^\dagger}$$

は同型に成る。

注:

(1.) 「$< d$」とは "torsorial degree"（$E^\dagger/E$ の相対的次数） $< d$.

(2.) 両辺とも d^2 次元 K ベクトル空間。

(3.) d が m を割り切る時、定理は不成立。例えば、$d = m = 1$ なら、$\Gamma(E, \mathcal{O}_E([0_E]) = \mathcal{L}) \to \mathcal{L}|_{0_E}$ は 0 になる。

(4.) 証明:

Mumford の代数的テータ関数
+ Zhang の admiss. metric の理論
+ やや込み入った次数の計算。

（B．） 「数論的」素点における整構造

<u>一般に</u>:

$$0 \to \omega_E \to E^\dagger \to E \to 0$$

($\omega_E = E$ 上の不変微分)

<u>「無限遠点」∞ の近傍では</u>:

$$E = \mathbf{G}_\mathrm{m}/q^{\mathbf{Z}}$$

('Tate curve')

$\Longrightarrow q$ に関する巾級数環上では:

$$\widehat{E} = \widehat{\mathbf{G}}_\mathrm{m}$$

$$\widehat{E}^\dagger = \widehat{\mathbf{G}}_\mathrm{m} \times \widehat{\omega}_E = \widehat{\mathbf{G}}_\mathrm{m} \times \left\langle \ \frac{dU}{U} \ \right\rangle$$

有限素点（混標数）における整構造：

$$\mathcal{O}_{\widehat{E}}[T] = \bigoplus \mathcal{O}_{\widehat{E}} \cdot T^j \Longrightarrow \bigoplus \ \mathcal{O}_{\widehat{E}} \cdot \binom{T}{j}$$

ただし、T: $\frac{dU}{U}$ に定まる ω_E 上の座標

.. ∞ だけではなく、$\overline{\mathcal{M}}_{1,0}$ 全体の上に

p 進的に延長可。

∞ での整構造：

$$\bigoplus \ \mathcal{O}_{\widehat{E}} \cdot \binom{T}{j} \Longrightarrow$$

$$\bigoplus \ \mathcal{O}_{\widehat{E}} \cdot q^{\approx -j^2/8d} \cdot \binom{T}{j}$$

"ガウス極" (cf. ガウス分布 e^{-x^2})

重要なテーマ:
　ガウス分布とその微分
(cf. Hermite 多項式)
...Dio. 幾何への応用への障害でもある。

無限素点における整構造:

'DR metric' と 'étale metric' を
　関係付けたい $\Longrightarrow$ 特殊関数を用いる
— モデル:

Hermite 多項式（slope $= \frac{1}{2}$）
Legendre 多項式（slope $= 1$）
　$= \lim$ (離散的 Tchebycheff 多項式)
二項係数 多項式 $= \binom{T}{r}$（slope $= 0$）

slope $= d \to \infty$ 時の scaling factor
(cf. cryst. coh. への Frob の作用)

（C．） 数論的な小平 —**Spencer** 射

主定理は関数論的な比較同型:

線型的な関数 + 等分点たちの完備化

$\Longrightarrow$ 古典的な比較同型になる：

<u>$\mathbf{C}$ 上では</u>：

$$\begin{array}{ccc} H^1_{\mathrm{DR}}(E, \mathcal{O}_E) & \supseteq & H^1_{\mathrm{sing}}(E, 2\pi i \cdot \mathbf{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E^\dagger & \supseteq & E_{\mathbf{R}} \end{array}$$

p 進体上では：

Hodge-Tate, DR 比較同型：

$$\text{`}H^1_{\mathrm{DR}} \cong H^1_{\text{ét}}\text{'}$$

も p 巾 等分点 への制限射で定義可能。

一般には （大域体、 $\mathbf{C}$、 p 進体）：

$$\Big\{\text{DR coh.}\Big\} \xrightarrow{\sim} \Big\{\text{ét. coh.}\Big\} \curvearrowleft \ \underline{\text{Galois}}$$

$\Longrightarrow$ Galois は DR coh. に作用 !!
$\Longrightarrow$ Hodge フィルへの影響を見ると
$\Longrightarrow$ 小平 —**Spencer** 射

base における移動

$\quad\quad \mapsto$ 誘導される Hodge フィルの移動

$\underline{\mathbf{C}\text{ 上では}}$:

'Galois' $= SL_2(\mathbf{R})$ （上半平面に作用）

$\Longrightarrow$ $\underline{\text{上の '数論的 KS' = 古典的な KS}}$

$\underline{p\text{ 進体上では}}$:

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{Z}_p[[T]]_{\mathbf{Q}_p})$$
$$\approx \text{Tang. bun.}(\mathbf{Z}_p[[T]]_{\mathbf{Q}_p})$$

（Faltings の alm. et. extns. の理論）

$\Longrightarrow$ $\underline{\text{上の '数論的 KS' = 古典的な KS}}$

（cf. Serre-Tate 理論）

$\underline{\text{Hodge-Arakelov （＝大域体）の場合}}$:

$\underline{\mathrm{Gal}}$(楕円曲線の族の Base $\otimes$ $\mathbf{Q}$)

$$\xrightarrow{\text{数論的 KS}} \quad \{\underline{\text{Arak}}.\text{ 理論的 flag 束}\}\ !!$$

§2. 哲学：「絶対的な微分を求めて」

（Ａ．）「微分」から「比較同型」へ

S： スキーム

$E \to S$： 楕円曲線の族

$\Longrightarrow$ $\underline{\text{分類射}}$ $S \to \mathcal{M}_{1,0}$

$\Longrightarrow$ その $\underline{\text{微分}}$ (KS) $\Omega_{\mathcal{M}_{1,0}}|_S \to \Omega_S$

$$\Downarrow$$

この微分の数論的 / 絶対的な類似

$$`\Omega_{\mathcal{M}_{1,0}}|_S \to \Omega_{\mathbf{Z}/\mathbf{F}_1}'$$

は存在するか（例えば、$S = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ や $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$, $[F : \mathbf{Q}] < \infty$ のとき）？？

ところが、 $\Omega_{\mathcal{M}_{1,0}}|_S = \omega_E^{\otimes 2}$ で

$$\omega_E \hookrightarrow H^1_{\mathrm{DR}}(E) \xrightarrow{\nabla_{\mathrm{GM}}} H^1_{\mathrm{DR}}(E) \otimes \Omega_S \longrightarrow \tau_E \otimes \Omega_S$$

$$\Longrightarrow \quad \Omega_{\mathcal{M}_{1,0}}|_S = \omega_E^{\otimes 2} \to \Omega_S \ \ (\mathrm{KS})$$

（∇_{GM}: H^1_{DR} に入る Gauss-Manin 接続）

$$\Downarrow$$

H^1_{DR}、 Hodge フィル ($\omega_E \hookrightarrow H^1_{\mathrm{DR}}$) は
数論的な場合にもある

$\Longrightarrow$ 後、 ∇_{GM} の類似 が必要

$\Longrightarrow$ de Rham 同型 を思い出してみよう
（$=$ $\mathbf{C}$ 上の比較同型） :

S: <u>Riemann 面</u> $\Longrightarrow$

$$H^1_{\mathrm{DR}}(E/S) \cong H^1_{\mathrm{sing}}(E/S, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_S$$

$\Longrightarrow$ $H^1_{\mathrm{sing}}(E/S, \mathbf{Z})$ の断面（セクション）は ∇_{GM} に対して <u>horizontal</u>

$\Longrightarrow$ ∇_{GM} は、$H^1_{\mathrm{sing}}(E/S, \mathbf{Z})$ の断面が horiz. となる <u>唯一の接続</u> である。

$$\Downarrow$$

<u>比較同型</u> を知っていれば $\Longrightarrow$ ∇_{GM} も知っていることになる。

<u>結論</u>: 数論的な **KS** を構成するには、数論的な比較同型を構成すればよい。

（Ｂ．）関数論的な比較同型

では、（大域的）数論的比較同型（ACI）は、どんな形をしているだろう？

（例えば、<u>$\mathbf{C}$ 上では</u>: $\otimes\ \mathbf{C}$
<u>p 進体上では</u>: $\otimes\ B_{\mathrm{DR}}$、B_{crys} 等）

<u>$\mathbf{C}$ 上の幾何的な場合には</u>: ∇_{GM} の存在の間接的な証拠の一は、'安定性'：

$$0 \to \omega_E \to H^1_{\mathrm{DR}}(E/S) \to \tau_E \to 0$$

この完全系列が <u>分裂</u> すれば — つまり、H^1_{DR} が '<u>不安定</u>' ならば — ω_E （= ample l.b.）に ∇ が入る

（矛盾！）

$\Longrightarrow$ '∇' は数論的な言葉に訳せないが、
<u>'安定性' は訳せる</u>

— 即ち、<u>Arak.</u> 理論的な束（の安定性）
$=$ 普通のベクトル束＋ Hermite 計量

$\Longrightarrow$ '安定性'（例えば、$\mathbf{Z}$ 上で）
$=$ '格子における物質の <u>等分布性</u>'

<u>注</u>： Arakelov 的次数大（小）
$\Longleftrightarrow$ 物質の密度が高い（低い）

$$\Downarrow$$

<u>（ACI の）予想される「形」 I:</u>

$$\left\{\text{DR coh. 内の物質の分布}\right\}$$
$$\cong \left\{\text{étale coh. 内の物質の分布}\right\}$$

<u>注</u>：右辺は‘ガロア’により、‘等分布’
$\Longrightarrow$ ACI より、左辺も‘等分布’

整数論では、‘<u>物質の分布</u>’ は
普通、‘<u>test fns.</u>’ で測られる $\Longrightarrow$

<u>（ACI の）予想される「形」II</u>:

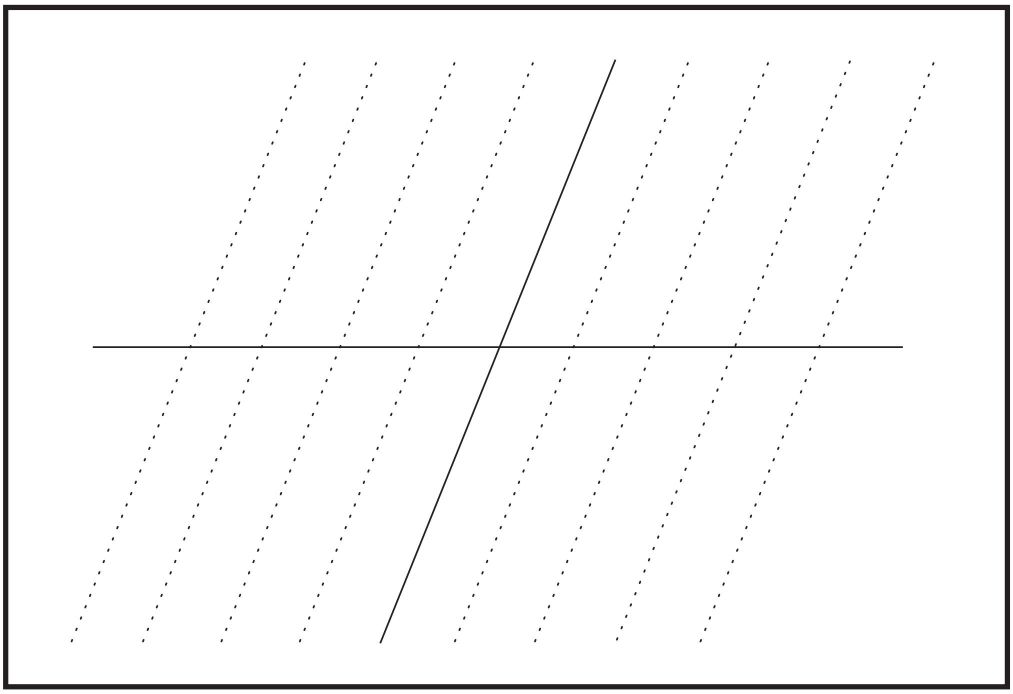
$$\left\{\text{DR coh. 上の test fns.}\right\}$$
$$\cong \left\{\text{étale coh. 上の test fns.}\right\}$$

但し、‘$\cong$’ は数体のすべての素点で
等長（isometry）であってほしい。
（Arakelov 理論を参照）

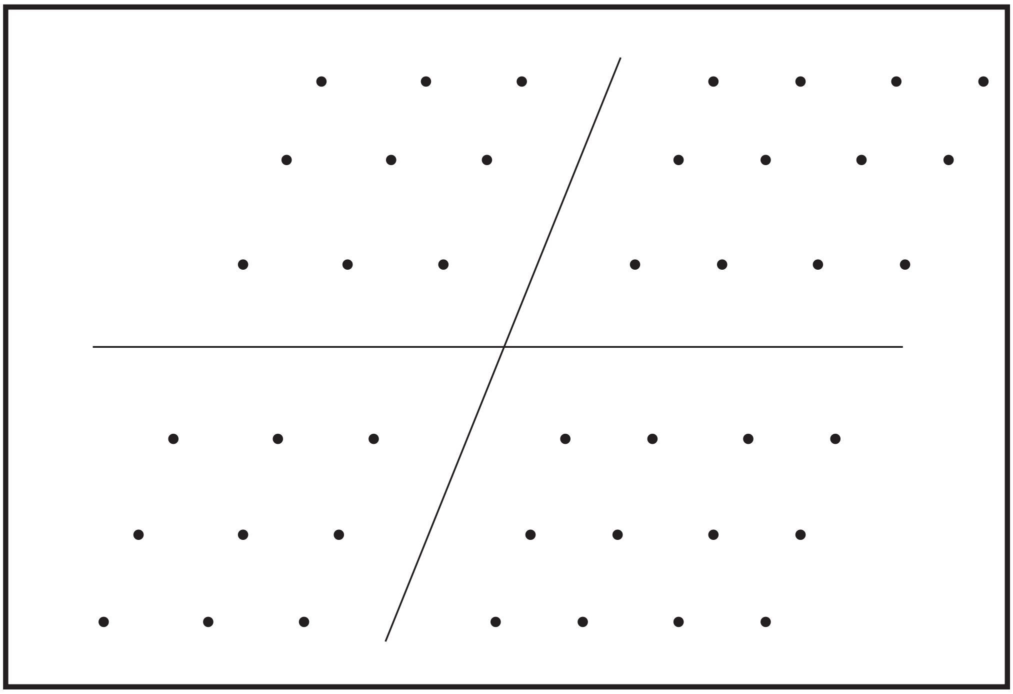
.. ＝　主定理の内容そのもの！！

‘‘<u>Hodge-Arakelov 比較同型</u>’

分裂するときの物質の分布：



等分布なときの物質の分布：



（Ｃ．）離散化と非線型性の意味

注: 分布を測るためには、どうしても
非線型的な test fns. が必要
— cf. $\mathbf{C}$ や p 進体上の Hodge 理論の
線型性、大域的モチーフ理論への
加法的なアプローチ

非線型性の原因:

(1.) 一般に、Arak. 理論 では、ものは
非線型的になりがち（例： $H^0(\mathcal{L})$）

(2.) 非可換トーラス $\approx$ テータ群の
$\approx$ Heisenberg 代数（cf. ガウス
分布）の 非線型的な対称性

離散性とも密接に関係している：

Hodge-Arakelov 比較同型＝
‘局所体上の Hodge 理論たちの**離散化**’

— 例えば、

Hodge 理論 $/\mathbf{C}$ $\approx$ ‘$E_{\mathbf{R}}$ 上の微積分’

HACI $\approx$ ‘等分点上の離散的な微積分’

$\Longrightarrow$ **周期**は

$$\begin{aligned} 2\pi i &= \lim_{d\to\infty} \ d\cdot(e^{2\pi i/d}-1) \\ &= \lim_{d\to\infty} \ (\text{テータ関数} \ /\mathbf{G}_{\mathrm{m}})|_{\text{等分点}} \end{aligned}$$

極限に現れる「系」の類似。

楕円曲線の
Hodge-Arakelov 理論 II

望月 新一
京都大学数理解析研究所
motizuki@kurims.kyoto-u.ac.jp

§**1.** 主定理の証明の方針

§**2.** Θ**-Convolution**

§1. 主定理の証明の方針

（A．） 主定理の復習と証明の準備

K: 標数 0 の体
E: K 上の楕円曲線
$E^\dagger$: その <u>普遍拡大</u> （２次元群スキーム）
$= \{(\mathcal{L}, \nabla_{\mathcal{L}}) | \deg(\mathcal{L}) = 0\} = H^1_{\mathrm{DR}}(\mathcal{O}_E^\times)$
$\eta \in E(K)$: 位数 m の等分点、
$d > 0$: 整数 s. t. d が m を割らない。
$\mathcal{L} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{O}_E(d \cdot [\eta])$

<u>主定理</u>: 制限射

$$\Gamma(E^\dagger, \mathcal{L}|_{E^\dagger})^{<d} \quad \stackrel{\sim}{\to} \quad \mathcal{L}|_{{}_dE^\dagger}$$

は同型に成る。

注: $E^\dagger \to E$ ... ω_E-torsor ($\omega_E = \Omega_E|_{0_E}$)

つまり、$E \times \mathbf{V}(\omega_E) = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_E[\tau_E])$
に「ひねり」が付いたもの

$\Longrightarrow$ $E^\dagger/E$ の torsorial degree
（相対的次数）が定義される：‘$< d$’

更に、$F^j(-) \overset{\mathrm{def}}{=} (-)^{<j}$ で主定理の左辺
に (Hodge) filtration が入り、

$$F^{j+1}/F^j(\Gamma(E^\dagger, \mathcal{L})^{<d}) = \Gamma(E, \mathcal{L}) \otimes \tau_E^{\otimes j}$$

$\Longrightarrow$ 楕円曲線のモジュライ空間上で考えると、主定理の両辺は、rank d^2 のベクトル束となり、

$$\deg(\Gamma(E, \mathcal{L})) \approx 0$$

$$\deg(\text{左辺}) \approx \sum_{j=0}^{d-1} j \cdot \deg(\tau_E)$$

一方、

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \mathcal{L}\big|_{{}_dE^{\dagger}} \cong \mathcal{O}\big|_{{}_dE^{\dagger}} \\ &= d \text{ 等分点上の } \underline{\text{関数}} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ 楕円曲線のモジュライ空間上では、

$$\deg(\text{右辺}) = 0$$

（B．） Θ 関数とその微分

<u>無限遠点（標数０）の近傍に注目</u>。

<u>帰着</u>： $\deg(\mathcal{L}) \rightsquigarrow 1 \ \ldots$ （Θ 群の理論、

元の E を $^{\exists}$ sub で割ることにより）

次に、Schottky 一意化

$$\mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}/q^{\mathbf{Z}} = E$$

上で定義される $\mathcal{L}$ の「<u>Θ 自明化</u>」により、

$\Gamma(E, \mathcal{L})$ の元 $\rightsquigarrow$ Θ 関数 $\sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{n^2} U^n$

と同様に、

$\Gamma(E^{\dagger}, \mathcal{L})$ の元 $\rightsquigarrow$ Θ 関数の <u>微分</u>

（$U \frac{\partial}{\partial U}$ に関して） ... cf. Weierstrass ζ

ただし、

U ： $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ 上の普通の乗法的座標

$q_{\text{当設定}} := q^{1/2d}_{\text{元の楕円曲線}}$

すると、$\Theta = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \ q^{n^2} U^n$

$\Longrightarrow$ 主定理の「<u>制限射</u>」は本質的には：

$$\text{抽象的な多項式 } P(-) \mapsto$$

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \ q^{n^2} \cdot P(U \tfrac{\partial}{\partial U}) U^n$$

$$= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \ q^{n^2} \cdot P(n) U^n$$

(但し、多項式の次数は $< d$ とする。)

ただ、定理では、 d <u>等分点</u> $\boldsymbol{\mu}_d \subseteq \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$<u>に制限</u> している $\Longrightarrow$ 制限射は次のように：

$$\text{多項式 } P(-) \mapsto \sum_{|n|\leq d} \ q^{n^2} \cdot P(n)U^n$$

（但し、 q の高い巾の掛かる項を無視。）

$\Longrightarrow$ <u>制限射の本質は</u>：（符号、 q を無視）

$$\text{多項式 } P(-) \mapsto$$
$$\{P(0), P(1), \ldots, P(d-1)\}$$

$\Longrightarrow$ （周知の通り） $P(T)$ の基底として、

$$\binom{T}{0}, \binom{T}{1}, \ldots, \binom{T}{d-1}$$

を採れば、 <u>$\mathbf{Z}$ 上で</u> 完全な同型が得られる。（少なくとも、無限遠点の近傍上で。）

（C．） 次数計算

あと、無限遠では、「ガウス極」が発生：

$$\approx q^{n^2}_{\text{当設定}} = q^{j^2/8d}_{\text{元の楕円曲線}}$$

（注：次数 j のところでは、符号を無視したため、n は $j/2$ に対応。）

$\Longrightarrow$ 楕円曲線のコンパクト化されたモジュライ上で、制限射の両辺の次数を計算すると、

$$\text{ガウス極の寄与} \approx \frac{1}{8d} \sum_{j=0}^{d-1} j^2$$

$$
\begin{aligned}
&\approx \frac{1}{8d} \cdot \frac{d^3}{3} = \frac{1}{12} \cdot (\frac{d^2}{2}) \\
&\qquad\qquad = (\frac{d^2}{2}) \deg(\omega_E) \\
&\qquad\qquad \approx \sum_{j=0}^{d-1} j \cdot \deg(\omega_E) \\
&\qquad\qquad = -(\text{元の DR side の次数})
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ （Zhang の理論の適用により）
次数が <u>ちょうど合う</u> ため、制限射は、無限遠だけでなく、モジュライ全体の上で <u>完全に同型</u> になる。

（証明終。）

（D．） **KS** 射とガウス極

無限遠で整構造を調整した後の主定理の左辺を

$$\mathcal{V} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma(E^{\dagger}, \mathcal{L})^{<d}(\text{ガウス極})$$

と書く。すると、主定理の制限射

$$\mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{{}_dE^{\dagger}} \;\cong\; \mathcal{O}|_{{}_dE^{\dagger}}$$

は、楕円曲線のモジュライ上（無限遠点の近くでも）完全に同型になる。

一方、base$\otimes\mathbf{Q}$ の Gal 群は右辺に自然に作用するから、

$$\mathrm{Gal} \curvearrowright \mathcal{V}$$

この作用が、 Hodge filtration $F^j(\mathcal{V})$ をどのくらい保つかを見ると、

$$\mathrm{Gal} \to \mathrm{Flag}(\mathcal{V})$$

（但し、$\mathrm{Flag}(\mathcal{V})$ は、$\mathcal{V}$ に入るすべての同じ rank のフィルのモジュライ）

... 数論的な KS 射

$$F^{j+1}/F^j(\mathcal{V}) = \Gamma(E, \mathcal{L}) \otimes \tau_E^{\otimes j}(\text{ガウス極})$$

$\Longrightarrow$ ふつうの KS みたいにするためには、
(例えば、 Dioph. 幾何に応用するには)
ガウス極をなくしたい!

§2. Θ-Convolution

（A．） Θ 関数との Convolution

ガウス極をなくしたい

$\Longrightarrow$ (I.), (B.) に出てきた

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{n^2}\cdot P(n)U^n$$

を $\sum_{n\in\mathbf{Z}} P(n)U^n$ にすり替えたい

$\Longrightarrow$ 「Fourier 級数」

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{n^2}\cdot P(n)U^n$$

の添字 n の係数を q^{n^2} で割りたい

$\Longrightarrow$ 元の $\Theta = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \ q^{n^2} \cdot U^n$ との

「逆 convolution」を取りたい

<u>注</u>： 一般に、 Fourier 変換を施すと、

掛け算 $\leftrightarrow$ convolution

つまり、「<u>Θ-Convolution</u>」 （＝ Θ との convolution）の <u>逆</u> を主定理の制限射に合成したい。

<u>問題</u>：これを、モジュライの無限遠点の近くで出来ても（＝上の q 展開の議論）、モジュライ全体の上に延長できるかどうか不明。

次節の定理によると、それが <u>できる</u>。

（B．） フーリエ係数の可逆性

$E, \eta, \mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_E(d \cdot [\eta])$: 主定理と同じ。

更に、G, $H \cong \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ s.t.

$$_dE = {_dE^\dagger} = G \times H$$

が与えてあるとする。

G: 「制限部分群」
(テータ関数を制限してフーリエ変換するための部分群)

H: 「Lagrangian 部分群」
(実際、E/H 上で作業する — cf. (I.), (B.) の「帰着」)

定理（フーリエ係数の可逆性）:

生成元 $s \in \Gamma(E, \mathcal{L})^H$ （$=H$ 不変部分）が、G 上に定める「代数的テータ関数」（cf. Mumford の理論）

$$\Theta_s \in \ \mathcal{L}|_G \ \cong \ \mathcal{O}|_G$$

の（有限巡回群）G 上の関数としてのフーリエ係数は（ある非常に珍しい例外を除いて）全部可逆である。

注： 従って、これらのフーリエ係数は、楕円曲線のモジュライ上で考えると、新しい（？） modular unit になる $\Longrightarrow$

問題： Siegel modular unit に関する係数を計算せよ。（未解決）

もう一つの帰結： 滑らかな楕円曲線の場合、フーリエ係数の可逆性

$\Longrightarrow$ Θ-Convolution の可逆性

$\Longrightarrow$ 主定理の制限射と、Θ-Conv. の逆との合成がとれる

$\Longrightarrow$ その合成は、「新しい比較同型」を定める（詳細略）。

問題点： 無限遠では、部分群 G, H が「良い位置」にある時、この新しい比較同型では、ガウス極はなくなる。しかし「ほとんどの位置（＝無限遠点）」では、ガウス極は部分的にしかなくならない。

$\Longrightarrow$ 完全になくすのはまだ先の話。